**Théorème :**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et $a=(a_1,a_2)\in U$.

On peut écrire, pour tout $h=(h_1,h_2)$ tel que $a+h\in U$ :

$f(a+h)=f(a)+D_1f(a).h_1+D_2f(a).h_2+\|h\|\varepsilon(h)$

avec $\varepsilon$ une fonction telle que $\varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\to}0$.

Cette relation est appelée développement limité à l'ordre 1 de $f$ en $a$.

**dém. :**

Posons

$$\Delta(h)=f(a+h)-(f(a)+D_1f(a)h_1+D_2f(a)h_2).$$

Notre objectif est d'établir

$$\frac{\Delta(h)}{\|h\|}\xrightarrow[h\to(0,0)]{}0.$$

Puisque $a\in U$ et que $U$ est ouvert, il existe $\alpha>0$ tel que $[a_1-\alpha,a_1+\alpha]\times[a_2-\alpha,a_2+\alpha]\subset U$.

Considérons $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|h\|\le\alpha$ de sorte que $h_1\in[a_1-\alpha,a_1+\alpha]$ et $h_2\in[a_2-\alpha,a_2+\alpha]$.

On peut écrire $\Delta(h)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-h_1D_1f(a_1,a_2)-h_2D_2f(a_1,a_2)=\Delta_1(h)+\Delta_2(h)$

avec

$$\Delta_1(h)=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)-h_1D_1f(a_1,a_2)$$
$$\text{et }\Delta_2(h)=f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-h_2D_2f(a_1,a_2).$$

Considérons la fonction $t\mapsto f(t,a_2+h_2)$. Celle-ci est définie au moins sur l'intervalle $[a_1-\alpha,a_1+\alpha]$ et a pour fonction dérivée $t\mapsto D_1f(t,a_2)$. En lui appliquant le TAF entre $a_1$ et $a_1+h_1$ (qui sont éléments de $[a_1-\alpha,a_1+\alpha]$) on obtient l'existence d'un élément $c_1(h)$ compris entre $a_1$ et $a_1+h_1$ tel que :

$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)=h_1D_1f(c_1(h),a_2+h_2)$. Cela permet d'écrire

$$\Delta_1(h)=h_1\left(D_1f(c_1(h),a_2+h_2)-D_1f(a_1,a_2)\right).$$

De même, en considérant la fonction $t\mapsto f(a_1,t)$, on obtient l'existence d'un élément $c_2(h)$ compris entre $a_2$ et $a_2+h_2$ tel que $f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=h_2D_2f(a_1,c_2(h))$ ce qui permet d'écrire

$$\Delta_2(h)=h_2\left(D_2f(a_1,c_2(h))-D_2f(a_1,a_2)\right).$$

Sachant $\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$, on a $|h_1|,|h_2|\le\|h\|$ et donc

$$\frac{\Delta(h)}{\|h\|}\le\left|D_1f(c_1(h),a_2+h_2)-D_1f(a_1,a_2)\right|+\left|D_2f(a_1,c_2(h))-D_2f(a_1,a_2)\right|$$

Quand $h\to(0,0)$, $h_1\to0$ et $h_2\to0$ donc, par encadrement $c_1(h)\to a_1$ et $c_2(h)\to a_2$.

Par composition, sachant que $D_1f$ et $D_2f$ sont continues on a :

$$D_1f(c_1(h),a_2+h_2)\to D_1f(a_1,a_2)\text{ et }D_2f(a_1,c_2(h))\to D_2f(a_1,a_2)$$

et donc on peut conclure que $\frac{\Delta(h)}{\|h\|}\to0$.